

# T.I.P.E : Hex, aux quatre coins de l'hexagone

Clément Canonne <ceacy@free.fr>

22 juin 2009

## Table des matières

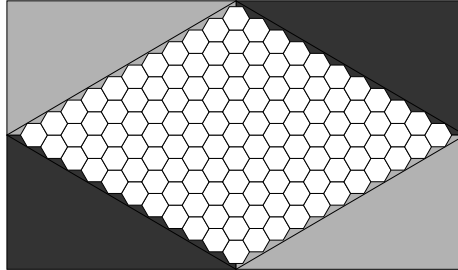
<b>I</b>	<b>Introduction</b>	<b>2</b>
<b>II</b>	<b>Généralités et aspects théoriques</b>	<b>3</b>
1	Règles du jeu . . . . .	3
2	Résultats théoriques . . . . .	4
2.1	Formalisation . . . . .	4
<b>III</b>	<b>Algorithmes</b>	<b>6</b>
1	Force brute . . . . .	6
1.1	Principe et coût . . . . .	6
1.2	Implémentation . . . . .	6
1.3	Complexité . . . . .	6
2	Quelques pistes pour améliorer cet algorithme . . . . .	7
2.1	Connexions virtuelles . . . . .	7
2.2	Implémentation semi-physique . . . . .	8
<b>IV</b>	<b>Hex et topologie : un théorème du point fixe</b>	<b>9</b>
1	Théorème de Brouwer . . . . .	9
1.1	Énoncé . . . . .	9
1.2	Démonstration en dimension 2, par <i>Hex</i> . . . . .	9
2	Généralisation d' <i>Hex</i> . . . . .	10
2.1	<i>Hex</i> en dimension $p$ . . . . .	10

# I Introduction

## II Généralités et aspects théoriques

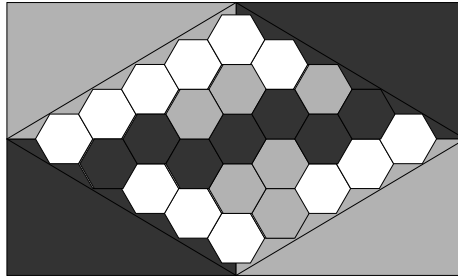
### 1 Règles du jeu

#### Le plateau



Plateau 11x11 standard

#### Déroulement et victoire



Victoire des noirs (cas d'un plateau 5x5)

## 2 Résultats théoriques

### 2.1 Formalisation

**Définition.** Un *graphe* (non-orienté)  $G$  est un couple  $(S, A)$  où  $S$  est un ensemble d'éléments appelés *sommets*, et  $A$  un ensemble de paires  $(s_1, s_2) \in S^2$  non-ordonnées, appelés *arêtes*.

**Notation** Pour  $x = (a, b) \in \mathbb{Z}^2$ , on pose  $\|x\|_\infty = \max(|a|, |b|)$  : c'est une norme (*norme infinie*).

**Définition.** Pour  $(a, b), (c, d) \in \mathbb{Z}^2$ , on définit la relation binaire  $\preceq$  par

$$(a, b) \preceq (c, d) \iff (a \leq c \text{ et } b \leq d)$$

**Proposition.**  $\preceq$  est une relation d'ordre partielle sur  $\mathbb{Z}^2$ .

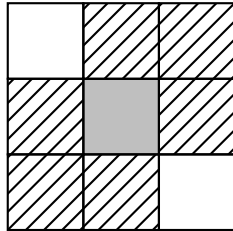
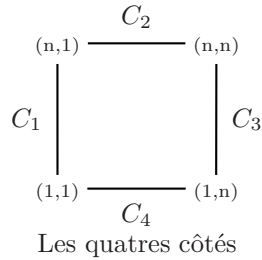
**Définition.** Un *plateau de taille  $n$*  est un graphe  $(S_n, A_n)$  avec

$$S_n = \{(a, b) \in \mathbb{Z}^2 \mid (1, 1) \preceq (a, b) \preceq (n, n)\}$$

Deux sommets  $(x, y) \in S_n^2$  sont dits *adjacents* si et seulement si ils sont comparables et si  $\|x - y\|_\infty = 1$

Les quatre côtés du plateau,  $C_1, C_2, C_3$  et  $C_4$  sont les sous-ensembles de  $S_n$  définis par

$$\begin{aligned} C_1 &= \{(k, 1)\}_{1 \leq k \leq n} & C_2 &= \{(n, k)\}_{1 \leq k \leq n} \\ C_4 &= \{(1, k)\}_{1 \leq k \leq n} & C_3 &= \{(k, n)\}_{1 \leq k \leq n} \end{aligned}$$



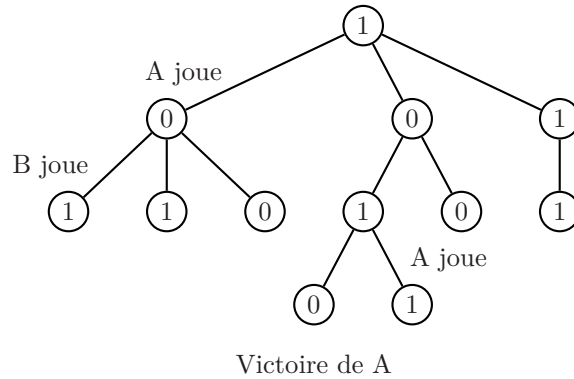
Cases adjacentes à celle du centre

**Proposition.** Une partie d'Hex ne peut se conclure que par la victoire d'un des deux joueurs (impossibilité d'un match nul) : si toutes les cases du plateau sont occupées, alors il existe un chemin noir (resp. blanc), reliant les deux côtés noirs (resp. blancs).

**Théorème.** Il existe une stratégie gagnante, i.e une stratégie menant à la victoire quels que soient les choix de l'adversaire, pour l'un des deux joueurs.

**Démonstration :** "Tout jeu fini déterministe à information complète qui ne peut se terminer par un match nul présente une stratégie gagnante pour l'un des joueurs".

- $v(T_n) = \max(T_{n+1}^k)$  si c'est à A de jouer (A choisit les chemins qui mène à un état final valant 1, c'est-à-dire à sa victoire)
- $v(T_n) = \min(T_{n+1}^k)$  si c'est à B de jouer.



**Corollaire.** Le premier à jouer dispose d'une stratégie gagnante.

## III Algorithmes

### 1 Force brute

#### 1.1 Principe et coût

- Force brute
- $\binom{\lceil \frac{1}{2}n^2 \rceil}{n^2}$  plateaux
- Estimation :  $\binom{\lceil \frac{1}{4}n^2 \rceil}{n^2} \cdot \binom{\lceil \frac{1}{4}n^2 \rceil}{\lceil \frac{3}{4}n^2 \rceil}$

#### 1.2 Implémentation

- OCaml, code récursif
- Résultat :

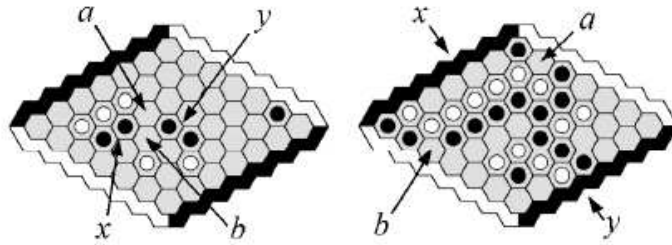
```
Taille 1 x 1 : ( 1 , 1 ) real 0m0.032s user 0m0.032s sys 0m0.000s
Taille 2 x 2 : ( 2 , 2 ) real 0m0.032s user 0m0.032s sys 0m0.000s
Taille 3 x 3 : ( 3 , 3 ) real 0m0.435s user 0m0.432s sys 0m0.000s
Taille 4 x 4 : ( 4 , 4 ) real 600m14.103s user 593m4.248s sys 0m37.634s
```

#### 1.3 Complexité

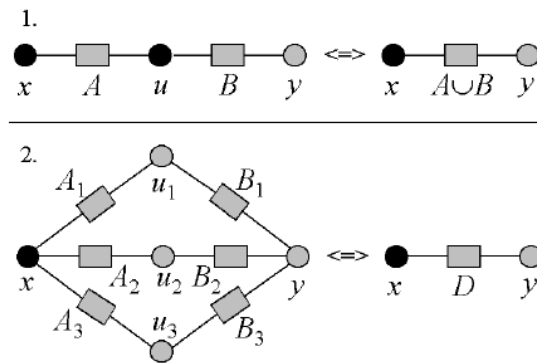
- ▷ Estimation optimiste :  $O(n^2!)$

## 2 Quelques pistes pour améliorer cet algorithme

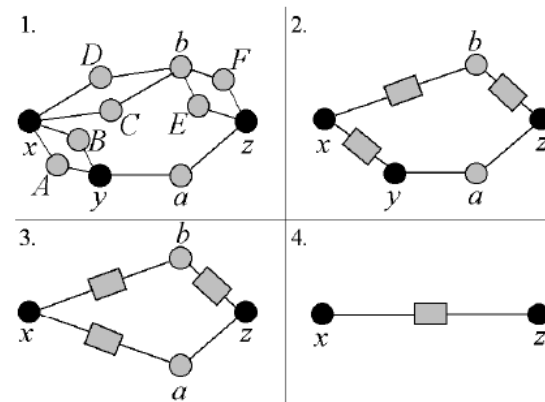
### 2.1 Connexions virtuelles



Exemple de connexions virtuelles (type "Pont") pour les Noirs



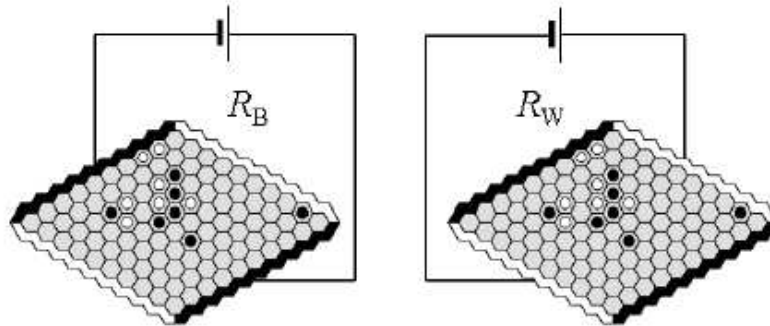
Règles de simplification ("ET" et "OU<sub>3</sub>")



Simplification automatique

## 2.2 Implémentation semi-physique

Utilisation de propriétés des circuits électriques pour créer une fonction d'évaluation :



$$E = \frac{R_W}{R_B}$$

- $E = 0$  : victoire des Blancs
- $E = +\infty$  : victoire des Noirs

## IV *Hex* et topologie : un théorème du point fixe

### 1 Théorème de Brouwer

#### 1.1 Énoncé

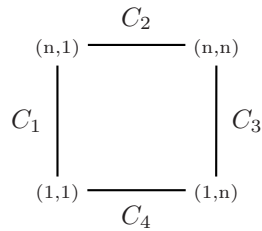
**Théorème.** *Soit  $f$  une application continue de la boule unité fermée de  $\mathbb{R}^n$  dans elle-même. Alors  $f$  admet un point fixe.*

- Faux pour la boule ouverte
- Illustrations en dimension 2 et 3

#### 1.2 Démonstration en dimension 2, par *Hex*

Reformulation de la propriété fondamentale d'*Hex* :

**Si  $H$  et  $V$  forment une partition de  $S_n$ , alors  $H$  ou  $V$  contient un chemin de  $C_1$  à  $C_3$  ou de  $C_2$  à  $C_4$ .**



En dimension 2,

$$Hex \Rightarrow Brouwer$$

(en fait,  $\Leftrightarrow$ )

Idées :

- discrétiser le problème afin de se ramener au cas d'un "plateau" d'*Hex*
- utiliser la compacité de la boule unité (uniforme continuité de  $f$ )

**Démonstration :** Soit  $f : [0, 1]^2 \Rightarrow [0, 1]^2$  continue, et  $f_1, f_2$  ses projections (on choisit la norme infinie pour laquelle la boule unité de  $\mathbb{R}^2$  est isomorphe au pavé en question, toutes les normes étant équivalentes). On cherche alors  $x$  tel que  $f(x) = x$ . Comme  $\|f - Id\|$  est continue sur le compact  $[0, 1]^2$  par théorèmes d'opérations, elle y atteint ses bornes :

$$\exists x_0 \in [0, 1]^2, \|f(x_0) - x_0\| = \inf_{[0, 1]^2} \|f - Id\|$$

Il suffit dès lors de montrer que  $\forall \varepsilon > 0, \exists x, \|f(x) - x\| \leq \varepsilon$ . Comme *Hex* est un jeu de plateau, avec des cases, il est nécessaire de discrétiser le problème afin de s'y ramener, et donc de trouver une "bonne" subdivision de  $[0, 1]^2$ . Soit  $\varepsilon > 0$  quelconque ; d'après le théorème de Heine,  $f$  est uniformément continue sur le compact  $[0, 1]^2$  ; soit  $\eta$  un module d'uniforme continuité associé à  $\varepsilon$ , et  $n$  entier tel que  $\frac{1}{n} \leq \eta$ .

Introduisons alors les 4 ensembles suivants, ensembles des points que  $f$  envoie respectivement *trop* "en haut", "en bas", "à gauche" ou "à droite".

$$\begin{aligned} H &= \{x \in S_n, f_2(x/n) - x_2/n > \varepsilon\} \\ B &= \{x \in S_n, x_2/n - f_2(x/n) > \varepsilon\} \\ G &= \{x \in S_n, x_1/n - f_1(x/n) > \varepsilon\} \\ D &= \{x \in S_n, f_1(x/n) - x_1/n > \varepsilon\} \end{aligned}$$

Il s'agit de montrer que ces quatre ensembles ne forment pas un recouvrement de  $S_n$ , et donc qu'il existe  $x \in S_n$  tel que  $\frac{x}{n}$  (qui est dans le pavé  $[0, 1]^2$ ) reste confiné, après action de  $f$ , à moins de  $\varepsilon$ . Posons  $Vert = H \cup B$ ,  $Hori = G \cup D$ , et supposons par l'absurde que  $S_n = Vert \cup Hor$ . Alors, d'après la propriété fondamentale d'*Hex*, l'un des deux ensembles contient un chemin entre deux côtés. Par exemple, *Hori* contient un chemin de  $C_1$  à  $C_3$  : ce chemin commence forcément dans  $D$  (puisque sinon, il est dans  $G$ , ce qui signifierait que  $f$  envoie le sommet initial hors de  $[0, 1]^2$  : absurde) ; de même, il finit dans  $G$ . Comme  $G$  et  $D$  sont clairement disjoints, il existe  $g \in G$  et  $d \in D$  adjacents. Par choix de la subdivision,  $|g_1/n - d_1/n| \leq \frac{1}{n} \|g - d\| = \frac{1}{n} \leq \eta$ . Quitte à diminuer  $\eta$ , on peut supposer  $\eta \leq \varepsilon$ , d'où :

$$\frac{d_1}{n} - \frac{g_1}{n} \geq -\varepsilon$$

mais comme, par définition de  $D$  et  $G$ ,  $f_1(\frac{d}{n}) - \frac{d_1}{n} > \varepsilon$  et  $g_1/n - f_1(g/n) > \varepsilon$ , on a  $f_1(\frac{d}{n}) - f_1(\frac{g}{n}) > \varepsilon$  en additionnant, d'où  $f(\frac{d}{n}) - f(\frac{g}{n}) > \varepsilon$ , alors même que  $\|g - d\| \leq \eta$

C'est absurde, car contredit l'uniforme continuité de  $f$ .

□

## 2 Généralisation d'*Hex*

### 2.1 *Hex* en dimension $p$

Généraliser *Hex* en dimension  $p$ , bien que d'un intérêt nul point du vue du jeu lui-même, est possible. Ceci permet alors de démontrer le théorème de Brouwer dans le cas général.