T.I.P.E : Hex, aux quatre coins de l'hexagone

Clément Canonne <ceacy@free.fr>

19 juin 2009

Table des matières

I Introduction 2
II Généralités et aspects théoriques 3
  1 Règles du jeu 3
  2 Résultats théoriques 3
III Algorithmes 7
  1 Force brute 7
  2 Quelques pistes pour améliorer cet algorithme 8
IV *Hex* et topologie : un théorème du point fixe 10
  1 Théorème de Brouwer 10
  2 Généralisation d'*Hex* 11

I Introduction

Hex est un jeu de plateau inventé par le poète et mathématicien danois Piet Hein en 1942, sous le nom *Polygon* ; redécouvert en 1947 par John Nash (qui sera l'un des pères de la théorie des jeux), il fut introduit à l'université de Princeton par celui-ci. Ce n'est qu'en 1952 que le nom *Hex* apparaît, lors de la commercialisation du jeu.

Tout comme le jeu d'échecs ou le jeu de go, avec lequel il a quelques similitudes, *Hex* est un *jeu de stratégie combinatoire abstrait* - c'est-à-dire, un jeu où s'opposent deux adversaires, qui ne laisse aucune place au hasard, et dont tous les éléments sont connus des joueurs (différent en cela, par exemple, de la bataille navale). Cependant, en dépit de sa simplicité, l'étude du jeu d'*Hex* et la détermination de stratégies gagnantes est d'une complexité étonnante, et certaines de ses caractéristiques présentent un intérêt mathématique plus que notable.

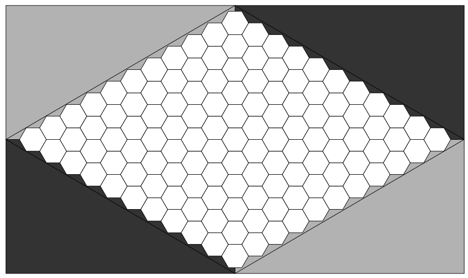
Ainsi, après une brève présentations des règles, nous considérerons quelques aspects théoriques fondamentaux du jeu, et ce qui en découle ; puis nous nous intéresserons aux stratégies et algorithmes applicables à *Hex* - avant, dans une dernière partie, de voir de quelle manière ce jeu permet de démontrer un résultat a priori sans rapport, le théorème du point fixe de Brouwer.

II Généralités et aspects théoriques

1 Règles du jeu

Le plateau

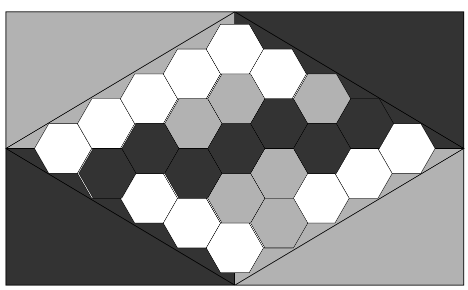
Il s'agit d'un losange pavé d'hexagones réguliers (le nombre de ceux-ci varie suivant les plateaux ; en général, une partie se déroule sur un plateau de 11x11 cases). Chacun des deux joueurs se voit attribuer une couleur, et deux côtés opposés du losange ; les quatres coins du losange appartiennent chacun à deux côtés.



Plateau 11x11 standard

Déroulement et victoire

À tour de rôle, les joueurs posent chacun un pion de leur couleur sur une case libre quelconque du plateau. Le premier à relier les deux côtés du losange qui lui sont attribués à l'aide de ses pions est vainqueur.
Une règle additionnelle est parfois ajoutée afin de rendre le jeu plus "juste", le premier joueur se trouvant avantagé : après que le premier pion a été posé, le second joueur peut décider d'échanger sa couleur avec son adversaire (*pie rule*, ou *swap rule*). Dans la suite, nous n'appliquerons pas cette variante à notre étude.



Victoire des noirs (cas d'un plateau 5x5)

2 Résultats théoriques

Formalisation

Afin de l'étudier rigoureusement, on pourrait fournir une formalisation mathématiques du jeu d'*Hex* , en abandonnant la structure des cases hexagonales, et identifiant un plateau à un graphe non orienté à n^2 sommets. Dès lors, il deviendrait possible d'utiliser des résultats usuels de la théorie des graphes afin de prouver des résultats sur le jeu, en particulier l'existence d'un gagnant à toute partie (cf. [4], par exemple). Cette formalisation, livrée ci-dessous, a cependant l'inconvénient de complexifier énormément tout résultat, et également celui de faire intervenir des lemmes non triviaux de la théorie des graphes. On ne l'utilisera donc qu'en partie.

Définition. *Un* `graphe` *(non-orienté) G est un couple (S, A) où S est un ensemble d'éléments appelés sommets, et A un ensemble de paires $(s_1, s_2) \in S^2$ non-ordonnées, appelés arêtes.*

Notation Pour $x = (a, b) \in \mathbb{Z}^2$, on pose $||x||_\infty = \max(|a|, |b|)$: c'est une norme (*norme infinie*).

Définition. *Pour $(a, b), (c, d) \in \mathbb{Z}^2$, on définit la relation binaire $\preceq$ par*

$$(a, b) \preceq (c, d) \Longleftrightarrow (a \leq c \text{ et } b \leq d)$$

Proposition. *$\preceq$ est une relation d'ordre partielle sur $\mathbb{Z}^2$.*

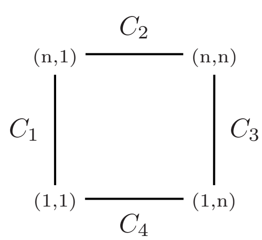
Démonstration : $\preceq$ est bien réflexive, antisymétrique et transitive : c'est une relation d'ordre. Cependant, $(1, 1) \npreceq (0, 2)$ et $(0, 2) \npreceq (1, 1)$: elle est partielle.

Définition. *Un* `plateau de taille` *n est un graphe (S_n, A_n) avec*

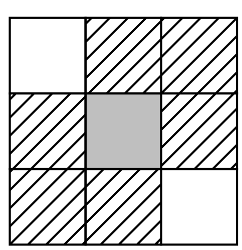
$$S_n = \left\{(a, b) \in \mathbb{Z}^2 \mid (1, 1) \preceq (a, b) \preceq (n, n)\right\}$$

Deux sommets $(x, y) \in \S_n^2$ sont dits `adjacents` *si et seulement si ils sont comparables et si $||x - y||_\infty = 1$*
Les quatres côtés du plateau, C_1, C_2, C_3 et C_4 sont les sous-ensembles de S_n définis par

$$C_1 = \{(k, 1)\}_{1 \leq k \leq n} \quad C_2 = \{(n, k)\}_{1 \leq k \leq n}$$
$$C_4 = \{(1, k)\}_{1 \leq k \leq n} \quad C_3 = \{(k, n)\}_{1 \leq k \leq n}$$



Les quatres côtés


Cases adjacentes à celle du centre

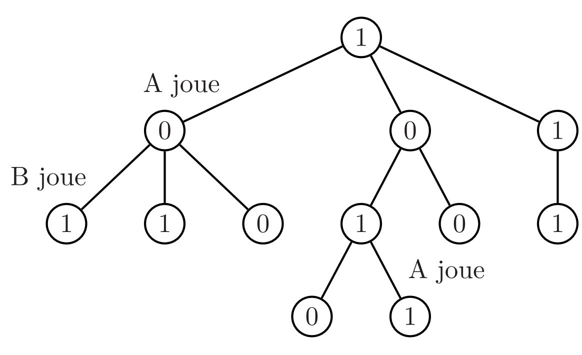
Proposition. *Une partie d'Hex ne peut se conclure que par la victoire d'un des deux joueurs (impossibilité d'un match nul) : si toutes les cases du plateau sont occupées, alors il existe un chemin noir (resp. blanc), reliant les deux côtés noirs (resp. blancs).*

Démonstration : Par exemple, intéressons-nous au joueur noir, i.e devant relier les côtés C_1 et C_3. On part de C_1, en ajoutant au plateau une rangée de cases de sorte que toutes les cases de C_1 soient adjacentes. Alors, on s'intéressé à l'ensemble E des sommets reliés à C_1, c'est-à-dire tels qu'il existe un chemin de sommets adjacents reliant ledit sommet à un sommet de C_1. Il s'agit clairement d'un ensemble non vide, connexe (puisque connexe par arcs). Si $C_3 \cap E \neq \varnothing$, c'est fini : C_1 et C_3 sont reliés. Sinon, on considère l'ensemble des sommets blancs adjacents à la frontière de E : il forme un chemin blanc reliant C_2 à C_4. dans un cas comme dans l'autre, il y a un vainqueur. On conclut alors en disant que par définition du jeu, la partie est terminée dès que l'un des deux joueurs a établit un chemin réussi ; il y a donc *au plus* un vainqueur.

Théorème. *Il existe une stratégie gagnante, i.e une stratégie menant à la victoire quels que soient les choix de l'adversaire, pour l'un des deux joueurs.*

Démonstration : *"Tout jeu fini déterministe à information complète qui ne peut se terminer par un match nul présente une stratégie gagnante pour l'un des joueurs".*
En effet, il est *théoriquement* possible de construire, pour un tel jeu, l'arbre des possibilités. Pour un jeu à deux joueurs, par exemple, attribuons à chaque état final la valeur 1 si le premier joueur, A, a gagné, et 0 si B a gagné. Chaque état final aura une valeur, un match nul étant exclu.
On peut dès lors remonter l'arbre, en attribuant récursivement une valeur à un état T_n, à partir des états T_{n+1}^k auxquels il mène :

- $v(T_n) = max(T_{n+1}^k)$ si c'est à A de jouer (A choisit les chemins qui mène à un état final valant 1, c'est-à-dire à sa victoire)
- $v(T_n) = min(T_{n+1}^k)$ si c'est à B de jouer.



Victoire de A

L'arbre une fois totalement rempli, la valeur de la racine donne le vainqueur de la partie (si la stratégie optimale ainsi établie est suivie).

Corollaire. *Le premier à jouer dispose d'une stratégie gagnante.*

Démonstration : Supposons que le deuxième joueur dispose d'une stratégie gagnante. Le premier joueur, A, n'a alors qu'à positionner son pion *n'importe où sur le plateau*, et agir à présent comme s'il était le deuxième joueur (ce dernier, B, endossant alors le rôle de premier joueur d'un jeu d'*Hex* se déroulant sur un plateau ayant une case déjà occupée). Dans le cas où la stratégie gagnante imposait de poser un pion à l'emplacement déjà occupé, A n'a qu'à le poser sur n'importe quelle case libre, et continuer à jouer la stratégie de la même manière, et remporter la victoire.
On vient de montrer* que l'existence d'une stratégie gagnante pour le second joueur implique l'existence d'une stratégie gagnante pour le premier ; ce qui est exclu, les deux joueurs ne pouvant bénéficier *chacun* d'une stratégie menant à coup sûr à la victoire. C'est donc le premier à jouer qui dispose d'une stratégie gagnante.

$\square$

* Cet argument, connu sous le nom de *strategy stealing*, repose sur un constat qui paraît évident : à *Hex* , une pièce supplémentaire sur le plateau n'est *jamais* un désavantage. En effet, elle ne peut qu'établir des connexions supplémentaires, et par là aider à créer un chemin.

Notons cependant que, bien que cette stratégie existe, elle n'est exhibée que pour des plateaux de taille inférieure à 8 (le cas $n = 8$ étant lui-même très récent) ; pour $n \geq 9$, la question reste ouverte.

III Algorithmes

1 Force brute

Principe et coût

Il n'existe malheureusement pas d'algorithme permettant de résoudre le jeu d'*Hex* en temps polynômial (cf. la section *3. Complexité*) : ici, l'approche la plus simple, dite de force brute (ou encore *algorithme glouton*) est la seule disponible - bien qu'il soit possible de l'améliorer un peu, toutefois sans réduire énormément la complexité finale.
Il s'agit en fait de calculer l'ensemble des combinaisons possibles, et de renvoyer un coup qui s'inscrit dans une séquence menant à une victoire assurée. Le coût, on le voit, est énorme : il y a n^2 possibilités pour le premier pion, $n^2 - 1$ pour le deuxième, etc. ; de la sorte, on aurait $n^2!$ façons de remplir un plateau. Notons toutefois que l'on a comptabilisé ici plusieurs fois les mêmes plateaux ; le nombre distinct de plateaux remplis est en réalité

$$\binom{\lceil \frac{1}{2}n^2 \rceil}{n^2}$$

Bien entendu, la plupart des parties s'arrêtent avant que le plateau ne soit plein ; en guise d'approximation, supposons qu'en moyenne, les parties s'arrêtent lorsque la moitié des cases est remplie ; on obtient alors un nombre moyen de combinaisons de l'ordre de

$$\binom{\lceil \frac{1}{4}n^2 \rceil}{n^2} \cdot \binom{\lceil \frac{1}{4}n^2 \rceil}{\lceil \frac{3}{4}n^2 \rceil}$$

Chaque joueur couvrant $\frac{1}{4}$ du plateau. Il ne s'agit que d'une approximation, mais elle est assez révélatrice : pour $n = 6$, on obtient déjà un nombre d'environ ... $4 \cdot 10^{14}$ combinaisons distinctes ! À raison d'une seconde par coup, en jouant 12 heures par jour, il faudrait à peu près 28 millions d'années pour toutes les jouer.

Implémentation

L'approche récursive se prête assez bien à ce type d'algorithme ; ici, l'implémentation a été réalisée en OCaml (un langage fonctionnel développé par l'INRIA), à l'aide de listes. On définit tout d'abord un certain nombre de fonctions annexes (par exemple, afin de tester si deux cases données sont adjacentes), puis le coeur du programme :

- `joueur_blanc` : cette fonction reçoit en arguments la taille du plateau, les cases libres déjà testées comme coup possible, les cases libres non encore envisagées, les cases actuellement occupées par des pions blancs, et celles occupées par des pions noirs. Elle essaie récursivement tous les coups à jouer possibles, appelant pour chacun d'eux la fonction `tour_noir` afin de déterminer s'ils s'inscrivent dans une stratégie gagnante, et renvoie `true` (ainsi que la case à jouer) dès qu'un coup valable est trouvé.
- `tour_noir` : Reçoit les mêmes arguments que `tour_blanc`. De même ; envisage récursivement tous les coups à jouer possibles, appelant pour chacun d'eux la fonction `tour_blanc` afin de déterminer s'ils s'inscrivent

dans une stratégie gagnant ; cependant, elle ne renvoie `true` que si *tous* les coups possibles conduisent à l'existence d'une stratégie gagnante pour les blancs.

- `chemin_blanc` : Reçoit en argument la liste des positions des pions blancs ; renvoie true s'il existe un chemin reliant les deux côtés blancs. L'implémentation fournie, pour cela, attribue à chaque pion blanc une valeur : initialement, 0 pour tous, à l'exception de ceux situés sur le "côté d'arrivée" qui se voient assignée la valeur n. Cette valeur est ensuite propagée de proche en proche aux cases adjacentes (chaque case prend la valeur la plus haute des cases qui lui sont adjacentes), jusqu'à ce que chaque case ait atteint sa valeur finale. Il suffit alors de regarder s'il existe une case du "côté de départ" ayant la valeur n : si oui, un chemin existe.
- `chemin_noir` : Idem, pour les pions noirs.

Le code est fourni en annexe. Je l'ai compilé et laissé tourner pendant un certain temps, afin d'estimer le temps nécessaire : voici le compte-rendu des durées nécessaires, pour n variant de 1 (!) à 7.

```
Taille 1 x 1 : ( 1 , 1 ) real 0m0.032s user 0m0.032s sys 0m0.000s
Taille 2 x 2 : ( 2 , 2 ) real 0m0.032s user 0m0.032s sys 0m0.000s
Taille 3 x 3 : ( 3 , 3 ) real 0m0.435s user 0m0.432s sys 0m0.000s
Taille 4 x 4 : ( 4 , 4 ) real 600m14.103s user 593m4.248s sys 0m37.634s
```

Après quinze heures, le plateau de taille 5x5 n'avait pas encore été résolu.

Complexité

Sans entrer dans les détails, le code (fourni en annexe) présente une complexité explosive : même en supposant une complexité en $O(1)$ pour `chemin_blanc` et `chemin_noir` (ce qui est loin d'être le cas), on obtient quand même une complexité totale en $O(n^2!)$. D'un point de vue pratique, cette complexité (optimiste !) est tout simplement inacceptable.

2 Quelques pistes pour améliorer cet algorithme

Connexions virtuelles

Afin d'améliorer les algorithmes de jeu, il est possible d'introduire le concept de *connexion virtuelle*. Il s'agit d'attribuer à certains chemins non réalisés, mais *stratégiquement certains*, une couleur (en fait, une valeur, si l'on se place dans l'optique de développer une fonction heuristique) alors même qu'ils sont encore neutres. "Stratégiquement certain" signifie que, bien que deux cases ne soient pas reliées, elle peuvent être considérées comme telles : en effet, *quoi que joue l'adversaire, il sera possible de jouer une séquence de coups reliant les deux cases*. Dès lors, à condition de ne pas "oublier" de réaliser les coups en question si l'adversaire décide d'attaquer la connexion virtuelle, il est absolument certain que, si cela s'avérait nécessaire, les deux cases puissent être reliées : il n'y a pas besoin de les relier effectivement pour que le chemin soit considéré comme acquis. Il est possible de définir des opérations simples sur ces connexions virtuelles - par exemple, l'*association série* : si (x, A, y) et (y, B, z) sont deux chemins virtuels (x,y,z étant des cases, et A et B des chemins les reliant, c'est-à-dire des ensembles de cases adjacentes) et si $x \notin B$, $y \notin A$ et $A \cap B = \emptyset$, alors $(x, A \cup B, y)$ est une connexion virtuelle. Il est possible de définir également la règle *association parallèle*. Ceci permet de simplifier récursivement le jeu en cours, jusqu'à obtenir une représentation équivalente à base de connexions virtuelles, beaucoup plus aisée à manipuler.

Implémentation semi-physique

Une autre solution, relativement originale, serait d'utiliser les propriétés physiques des conducteurs afin de construire une "machine-évaluation", c'est-à-dire une fonction d'évaluation partiellement "tangible". Considérons un plateau d'*Hex* modifié selon les règles suivantes :
- une case blanche a une résistance nulle
- une case noire a une résistance infinie (circuit ouvert)
- une case neutre a une résistance r

Alors, en mesurant la résistance R_b entre les deux côtés blancs, on a une évaluation de la situation. Si $R_b = 0$, les blancs ont gagné ; si $R_b = \infty$, les noirs ont gagné ; et plus R_b est faible, plus la position actuelle est avantageuse pour les blancs.
En créant un circuit similaire avec des règles inversées, on obtient R_n qui reflète l'avantage des noirs ; alors, $E = \frac{R_b}{R_n}$ est une bonne fonction d'évaluation. Cette idée a été pour la première fois introduite par Claude Shannon et E.F.Moore en 1953.

IV *Hex* et topologie : un théorème du point fixe

1 Théorème de Brouwer

Énoncé et variantes

Ce théorème de topologie découlerait d'une observation faite par le mathématicien néerlandais Luitzen Egbertus Jan Brouwer, alors qu'il mélangeait son café auquel il venait d'ajouter du lait : à chaque instant, il existe à la surface du café qui n'a pas bougé.
D'un point de vue mathématique, cela devient :

Théorème. *Soit f une application continue de la boule unité fermée de $\mathbb{R}^n$ dans elle-même. Alors f admet un point fixe.*

Remarque : Aucune hypothèse n'est faite sur le caractère surjectif ou même surjectif de f : la continuité suffit.

Démonstration en dimension 2, par *Hex*

Il est possible de démontrer ce théorème à l'aide d'*Hex* , en dimension 2 : en fait, il y a alors équivalence entre le théorème de Brouwer et la propriété fondamentale d*Hex* , qui se reformule ainsi : **Si H et V forment une partition de S_n, alors H ou V contient un chemin de C_1 à C_3 ou de C_2 à C_4.**
Cependant, on ne se préoccupe ici que d'une seule implication : *Hex* $\Rightarrow$ Brouwer.

Démonstration : `Soit` $f : [0,1]^2 \Rightarrow [0,1]^2$ continue, et f_1, f_2 ses projections (on choisit la norme infinie pour laquelle la boule unité de $\mathbb{R}^2$ est isomorphe au pavé en question, toutes les normes étant équivalentes). On cherche alors x tel que $f(x) = x$. Comme $||f - Id||$ est continue sur le compact $[0,1]^2$ par théorèmes d'opérations, elle y atteint ses bornes :

$$\exists x_0 \in [0,1]^2,\ ||f(x_0) - x_0|| = \inf_{[0,1]^2} ||f - Id||$$

Il suffit dès lors de montrer que $\forall \varepsilon > 0, \exists x, ||f(x) - x|| \leq \varepsilon$. Comme *Hex* est un jeu de plateau, avec des cases, il est nécessaire de discrétiser le problème afin de s'y ramener, et donc de trouver une "bonne" subdivision de $[0,1]^2$. Soit $\varepsilon > 0$ quelconque ; d'après le théorème de Heine, f est uniformément continue sur le compact $[0,1]^2$; soit η un module d'uniforme continuité associé à ε, et n entier tel que $\dfrac{1}{n} \leq \eta$.

Introduisons alors les 4 ensembles suivants, ensembles des points que f envoie respectivement *trop* "en haut", "en bas", "à gauche" ou "à droite".

$$H = \{x \in S_n,\ f_2(x/n) - x_2/n > \varepsilon\}$$
$$B = \{x \in S_n,\ x_2/n - f_2(x/n) > \varepsilon\}$$
$$G = \{x \in S_n,\ x_1/n - f_1(x/n) > \varepsilon\}$$
$$D = \{x \in S_n,\ f_1(x/n) - x_1/n > \varepsilon\}$$

Il s'agit de montrer que ces quatres ensembles ne forment pas un recouvrement de S_n, et donc qu'il existe $x \in S_n$ tel que $\frac{x}{n}$ (qui est dans le pavé

$[0,1]^2$) reste confiné, après action de f, à moins de ε. Posons $Vert = H \cup B$, $Hori = G \cup D$, et supposons par l'absurde que $S_n = Vert \cup Hori$. Alors, d'après la propriété fondamentale d'*Hex* , l'un des deux ensembles contient un chemin entre deux côtés. Par exemple, $Hori$ contient un chemin de C_1 à C_3 : ce chemin commence forcément dans D (puisque sinon, il est dans G, ce qui signifierait que f envoie le sommet initial hors de $[0,1]^2$: absurde) ; de même, il finit dans G. Comme G et D sont clairement disjoints, il existe $g \in G$ et $d \in D$ adjacents. Par choix de la subdivision, $|g_1/n - d_1/n| \leq \frac{1}{n}||g-d|| = \frac{1}{n} \leq \eta$ Quitte à diminuer η, on peut supposer $\eta \leq \varepsilon$, d'où :

$$\frac{d_1}{n} - \frac{g_1}{n} \geq -\varepsilon$$

mais comme, par définition de D et G, $f_1(\frac{d}{n}) - \frac{d_1}{n} > \varepsilon$ et $g_1/n - f_1(g/n) > \varepsilon$, on a $f_1(\frac{d}{n}) - f_1(\frac{g}{n}) > \varepsilon$ en additionnant, d'où $f(\frac{d}{n}) - f(\frac{g}{n}) > \varepsilon$, alors même que $||g-d|| \leq \eta$
C'est absurde, car contredit l'uniforme continuité de f.

□

2 Généralisation d'*Hex*

Hex en dimension p

Généraliser *Hex* en dimension p, bien que d'un intérêt nul point du vue du jeu lui-même, est possible. Ceci permet alors de démontrer le théorème de Brouwer dans le cas général

Bibliographie

[1] Site internet. http://en.wikipedia.org/wiki/Brouwer_fixed_point_theorem.

[2] Site internet. http://en.wikipedia.org/wiki/Hex_(board_game).

[3] Ryan B. Hayward et Jack van Rijswijck. Hex and Combinatorics. *Discrete Math*, Décembre 2005.

[4] David Gale. "The Game of Hex and Brouwer Fixed-Point Theorem". *The American Mathematical Monthly*, 86 :818–827, 1979.

[5] Thomas Maarup. "Everything You Always Wanted to Know About Hex But Were Afraid to Ask". Master's thesis, University of Southern Denmark, Department of Mathematics and Computer Science, 2005.