Un bref aperçu de la modélisation mathématique des épidémies (et phénomènes similaires)

Clément Canonne

26 novembre 2007

Table des matières

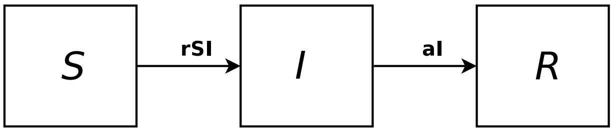
I Généralités et première approche

1 Introduction

Enjeux :
- mieux comprendre la propagation des épidémies, afin d'en prévoir le déroulement
- étudier l'impact des différents facteurs sur l'évolution d'une maladie
- mettre au point les mesures de prévention/traitement optimales

Rappel : il ne s'agit pas de modéliser *ex nihilo*, pour la beauté des mathématiques : tout modèle doit être confirmé (ou infirmé) par des données provenant d'une études des épidémies antérieures (exemple : peste de Bombay (1905-1906), où l'on dispose du nombre de morts par semaine de manière assez précise).

2 Modèle SIR, quelques résultats

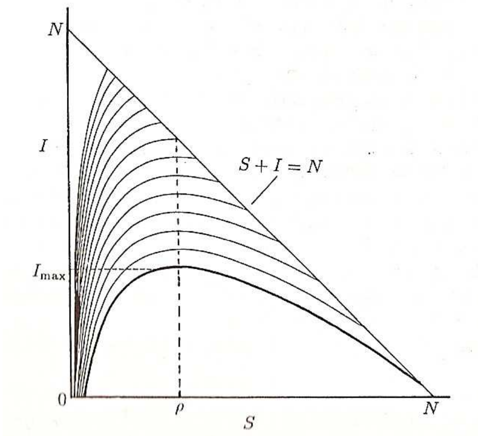


Modèle de Kermack-McKendrick (1927)

$$
\begin{aligned}
\frac{\mathrm{d}S}{\mathrm{d}t} &= -rSI \\
\frac{\mathrm{d}I}{\mathrm{d}t} &= rSI - aI \\
\frac{\mathrm{d}R}{\mathrm{d}t} &= aI
\end{aligned}
$$

- On retrouve que $N = S + R + I$ à tout t
- Condition de propagation : $S_0 > \frac{a}{r}$
- Taux de reproduction initial de l'infection : $R_0 = \frac{rS_0}{a}$
- Lorsque $t \to \infty$:

$$
\begin{aligned}
S &\to S_\infty \\
I &\to 0 \\
R &\to R_\infty
\end{aligned}
$$



3 Limites du modèle SIR

- Population uniformément mélangée
- Équiprobabilité des contacts (non applicable aux MST, par exemple)
- Et si pas d'immunité acquise ?
- Inapplicable à une population d'effectif variable (échelles de temps supérieures à l'année)

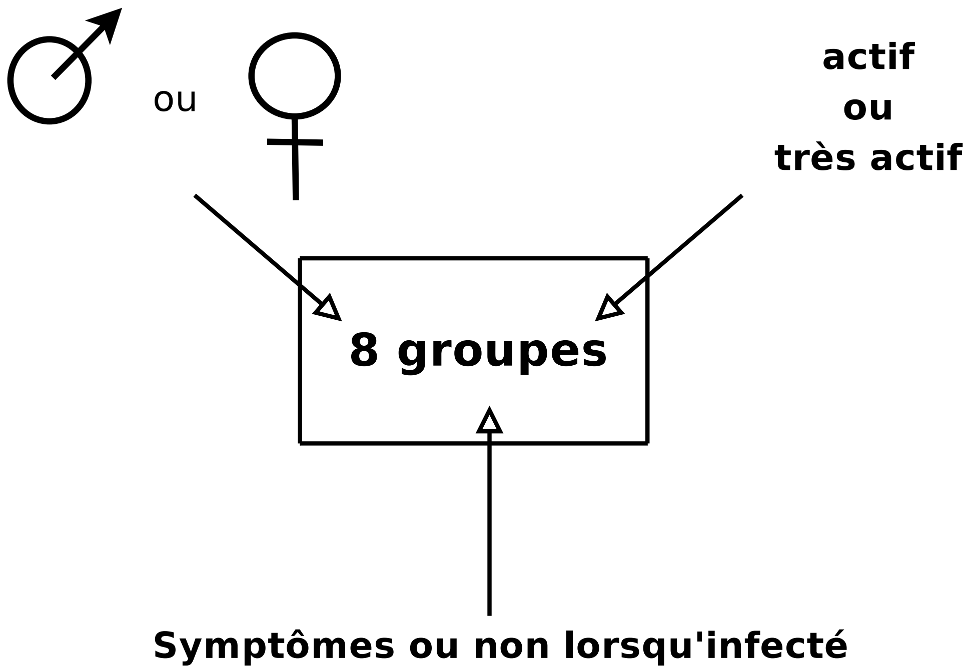
II Modèle à groupes multiples

1 Principe

Pallier certaines de ces limitations : autre modèle, basé sur le SIR ou SI*, mais plus adapté, notamment aux MST.
On sépare la population en n groupes, qui interagissent entre eux ; dans chaque groupe, on a des S et des I (éventuellement des R). Les interactions entre groupes dépendent des caractéristiques des groupes.

2 Étude : cas de la blennoragie

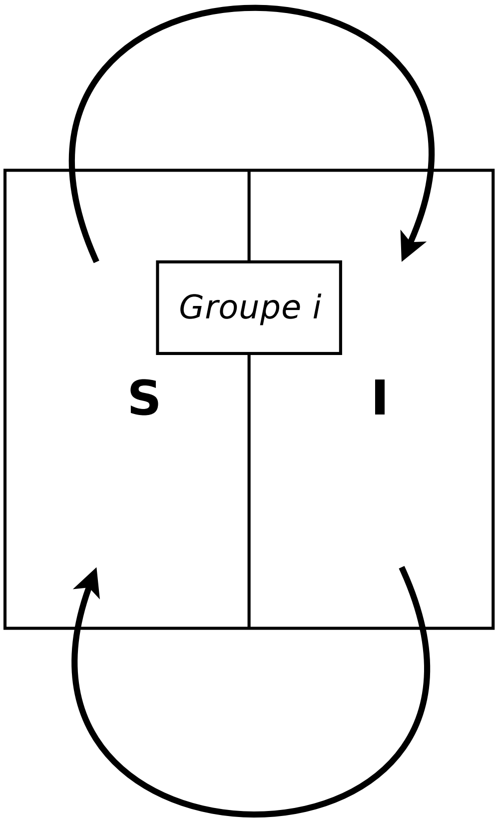
La blennoragie (alias gonorrhée, chaude-pisse ou chtouille) est une maladie sexuellement transmissible autrefois confondue avec la syphilis. Il s'agit d'une infection des organes génito-urinaires dont la durée d'incubation est d'environ 3 jours.
Contracter la blennoragie ne fournit aucune immunité future ; de plus, certaines des personnes atteintes présentent des symptômes visibles, d'autres non.



- N_i : fraction de la population de ce sexe contenue dans le groupe i
- $I_i(t)$: fraction d'infectés au sein de ce groupe
- D_i : durée moyenne, en mois, de l'infection dans le groupe i
- $L_{i,j}$: nombre de rapports, par unité de temps, d'un infecté du groupe j avec les membres du groupe i (il s'agit du pourcentage moyen d'individus de i avec lesquels cet infecté a des rapports sexuels provoquant une infection).
  $(L_{i,j})_{1\leq i,j\leq 8}$ est la matrice de contact

Pour un groupe donné :

$$\sum_{j=1}^{8} L_{i,j} N_j I_j (1 - I_i)$$



$$\frac{N_i I_i}{D_i}$$

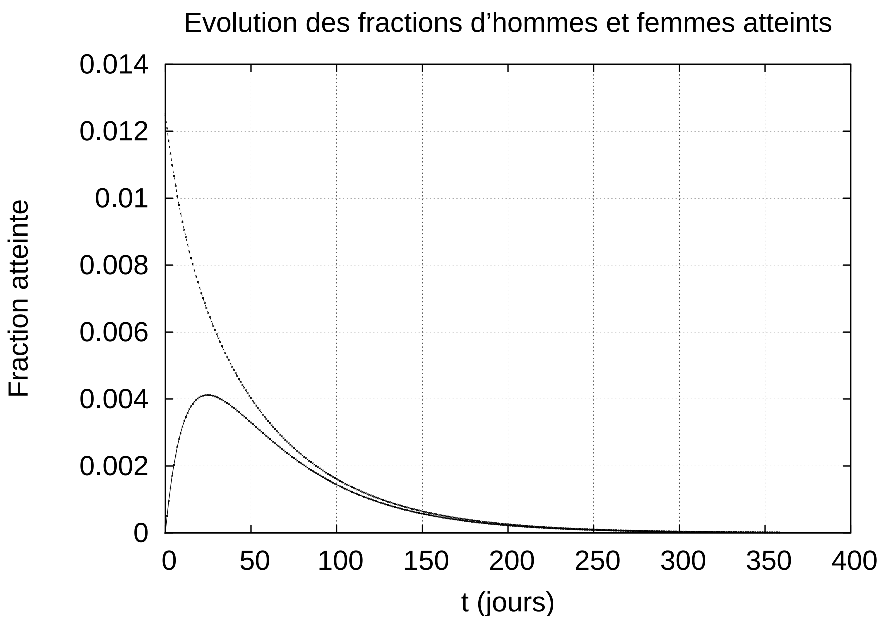
$$\frac{\mathrm{d} N_i I_i}{\mathrm{d} t} = \sum_{j=1}^{8} L_{i,j} N_j I_j (1 - I_i) - \frac{N_i I_i}{D_i}$$

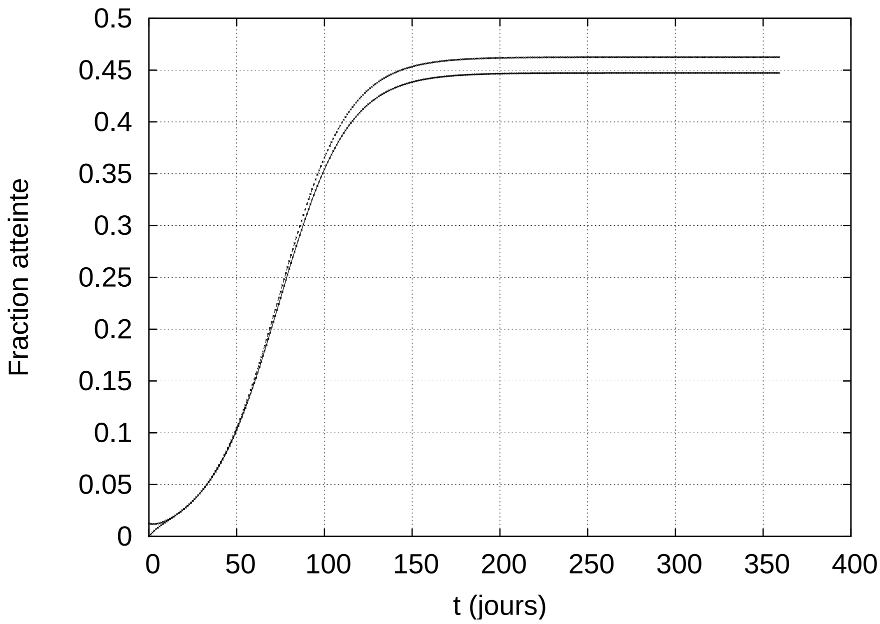
3 Implémentation (C++)

Après implémentation de ce modèle, et en utilisant *gnuplot* pour le tracé des courbes à partir des valeurs renvoyées, voici les graphes obtenus pour deux matrices de contact différentes (voici la première, la deuxième étant similaire, à un facteur 4 près)

$$(L_{i,j})_{1\leq i,j\leq 8} = \begin{pmatrix} 0 & 0.005 & 0 & 0.01 & 0 & 0.01 & 0 & 0.002 \\ 0.005 & 0 & 0.01 & 0 & 0.01 & 0 & 0.002 & 0 \\ 0 & 0.005 & 0 & 0.01 & 0 & 0.01 & 0 & 0.002 \\ 0.005 & 0 & 0.01 & 0 & 0.01 & 0 & 0.002 & 0 \\ 0 & 0.005 & 0 & 0.01 & 0 & 0.01 & 0 & 0.002 \\ 0.005 & 0 & 0.01 & 0 & 0.01 & 0 & 0.002 & 0 \\ 0 & 0.005 & 0 & 0.01 & 0 & 0.01 & 0 & 0.002 \\ 0.005 & 0 & 0.01 & 0 & 0.01 & 0 & 0.002 & 0 \end{pmatrix}$$

Foyer d'infection initial : 10% du groupe des hommes asymptomatiques sexuellement très actifs.





4 Élargissements possibles

4.1 Détection et dépistage

On peut intégrer des facteurs tels que la détection naturelle (>0 pour les symptomatiques, 0 pour les asymptomatiques) et le dépistage (proportionnel au nombre d'infectés testés), ce qui mènerait à

$$\frac{\mathrm{d}N_iI_i}{\mathrm{d}t} = \sum_{j=1}^{8} L_{i,j}N_jI_j(1-I_i) - \frac{N_iI_i}{D_i} - CR_i - EP_i$$

où C est une "constante de détection", et E un réel représentant l'effort du gouvernement en matière de politique de dépistage. On peut par exemple supposer R_i nul pour les groupes asymptomatiques, et égal à N_iI_i sinon. Dans le cas d'un dépistage systématique réservé aux femmes, on aurait P_i nul pour les groupes masculins, et égal à N_iI_i pour les groupes féminins.

4.2 Propagation d'une idéologie

Ce modèle peut s'appliquer, par exemple, au cas de la propagation du communisme au sein d'une société, sur une durée relativement courte, en considérant que la propagation s'effectue lorsqu'un individu en convainc un autre. On suppose de plus qu'après un certain laps de temps, ledit individu change d'opinion au sujet des idées qu'il défendait.
Le modèle peut alors être adapté avec les caractéristiques de groupe suivantes :

- jeunes / adultes
- riches / pauvres
- charismatiques / peu charismatiques